Equations Differentielles

Terminale - Matheo

COURS: Équations Différentielles

Introduction

Les équations différentielles constituent un outil puissant pour modéliser de nombreux phénomènes en physique, biologie, économie et autres domaines. Elles permettent de décrire l'évolution de grandeurs en fonction du temps ou d'autres variables.

I. Équation différentielle y' = f

1. Notion d'équation différentielle

DÉFINITION :

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction (généralement notée y).

Elle peut faire intervenir la fonction elle-même, ses dérivées (première dérivée y', deuxième dérivée y'', etc.), et la variable x de la fonction.

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer l'ensemble des fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ (ou sur le plus grand domaine de définition possible) qui vérifient l'équation.

EXEMPLE :

Trouver intuitivement au moins une fonction solution de chacune des équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2x$
2. $y' = 1 + e^x$
3. $y' = y$
4. $y'' = 3x$

REMARQUE :

Les notations y et y' sont des abus de langage et de notation dans ce contexte, qui assimilent y à $y(x)$ et y' à $y'(x)$.

Strictement parlant, l'équation différentielle $y' = 2y$ devrait s'écrire : l'équation (E) d'inconnue y telle que pour tout réel x (en supposant ℝ l'intervalle de travail), $y'(x) = 2y(x)$.

EXERCICE :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 2y$.

1) Justifier que les fonctions g et h, définies et dérivables sur ℝ par $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = e^{2x+5}$, sont solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = 2y$.

2) Proposer une autre fonction solution de l'équation différentielle (E).

2. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

DÉFINITION :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Autrement dit, une primitive de f sur I est une fonction F, dérivable sur I, telle que pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLES :

1) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = 3x^2 + 5x - 6$.

2) Démontrer que la fonction F définie sur ℝ par $F(x) = (2x+3)e^{1-3x}$ est une primitive de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = (-6x-7)e^{1-3x}$.

THÉORÈME :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

THÉORÈME :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I.

• f admet une infinité de primitives sur I.

• Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \to F(x) + k$, avec k un réel. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

DÉMONSTRATION :

f est continue sur I donc elle admet des primitives. Posons F_1 et F_2 deux de ses primitives.

Soit alors G la fonction définie et dérivable sur I tel que pour tout réel x de I, $G(x) = F_2(x) - F_1(x)$.

Ainsi, pour tout x de I, $G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Donc G est constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que pour tout x de I, $G(x) = k$, soit $F_2(x) - F_1(x) = k$, d'où $F_2(x) = F_1(x) + k$.

k décrivant $\mathbb{R}$, f admet bien une infinité de primitives sur I, et ces primitives ne diffèrent que de cette constante k.

3. Primitive vérifiant une condition particulière

PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Soient x_0 un réel de I et y_0 un réel quelconque.

L'équation différentielle (E) : $y' = f$ admet une unique solution F sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Autrement dit, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

DÉMONSTRATION :

Soit G une primitive de f sur I.

D'après le théorème précédent, toutes les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \to G(x) + k$, avec k un réel.

On cherche alors k tel que $G(x_0) + k = y_0$, ce qui équivaut à $k = y_0$

$- G(x_0)$.

Or k étant un réel, il suffit de fixer la valeur de k à $y_0 - G(x_0)$ pour obtenir l'unique primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.

EXEMPLE :

Soit (E) l'équation différentielle $y' = e^{3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E).

2) Déterminer la solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = -1$.

REMARQUE :

Il est possible à la calculatrice de résoudre une équation différentielle avec ou sans condition :

• deSolve(y'=exp(3x),x,y) (pour résoudre sans condition)

• ou

• deSolve(y'=exp(3x) and y(0)=-1,x,y) (pour résoudre avec une condition initiale)

II. Équation différentielle y' = ay

1. Définition

DÉFINITION :

Soit a un réel. L'équation différentielle $y' = ay$ (ou $y' - ay = 0$) est appelée équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants.

REMARQUE :

On parle aussi d'équation différentielle sans second membre plutôt que d'équation différentielle homogène.

EXEMPLE :

Les équations différentielles $y' = 5y$ et $3y' + 6y = 0$ sont des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

2. Résolution de l'équation différentielle y' = ay

THÉORÈME :

Soit a un réel.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f_k définies sur ℝ par $f_k(x) = ke^{ax}$, où k est une constante réelle.

DÉMONSTRATION :
Première partie (direct) :

Soit k un réel, et soit alors f_k la fonction définie sur ℝ par $f_k(x) = ke^{ax}$.

La fonction f_k est dérivable sur ℝ et pour tout réel x, $f_k'(x) = ake^{ax}$, donc $f_k'(x) = af_k(x)$.

Donc f_k est bien une solution de l'équation différentielle (E) : $y' = ay$.

Deuxième partie (réciproque) :

Réciproquement, soit f une solution de (E), et montrons que f est de la forme $x \mapsto ke^{ax}$.

Posons g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = f(x)e^{-ax}$.

g est dérivable sur ℝ et pour tout réel x, $g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = af(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax}$ (car f est solution de $y' = ay$) $= 0$.

Donc g est une fonction constante, donc il existe un réel k tel que pour tout réel x, $g(x) = k$, soit $f(x)e^{-ax} = k$, d'où $f(x) = ke^{ax}$.

EXEMPLES :

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 5y$.
2. a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y' + 8y = 0$.

b) Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 2$.

III. Équation différentielle y' = ay + b

1. Définition

DÉFINITION :

Soit a un réel non nul et b un réel quelconque. L'équation différentielle $y' = ay + b$ (ou $y' - ay = b$) est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants (avec second membre).

REMARQUE :

Ici, le terme « homogène » (ou « sans second membre ») a disparu car l'équation est du type $y' - ay = b$, et le second membre est donc le réel b.

EXEMPLE :

Les équations différentielles $y' = -3y + 2$ et $5y' + 7y = 1$ sont des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

2. Résolution de l'équation différentielle y' = ay + b

THÉORÈME :

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = g_h(x) + g(x)$, où g_h est solution de l'équation $y' = ay$ et g est la solution particulière constante de (E).

PROPRIÉTÉ :

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est une constante réelle.

DÉMONSTRATION :

Étape 1 : Recherche d'une solution particulière constante g(x)

Soit g une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$.

g est solution de $y' = ay + b$ ⇔ $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x) + b$

⇔ $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 = ag(x) + b$ (car g est constante, $g'(x) = 0$)

⇔ $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{b}{a}$ (car $a \neq 0$).

Donc l'équation $y' = ay + b$ admet bien une unique solution constante g (qui vérifie donc $g' = ag + b$).

Étape 2 : Solution générale $f_k(x) = k \cdot e^{ax} + g(x)$

Soit alors f_k une fonction définie sur $\mathbb{R}$ solution de $y' = ay + b$. Alors :

f_k est solution de $y' = ay + b$ ⇔ $f_k' = af_k + b$.

⇔ $f_k' - g' = af_k + b - g'$

⇔ $f_k' - g' = af_k + b - ag - b$ (car $g' = ag + b$)

⇔ $(f_k - g)' = a(f_k - g)$.

⇔ $f_k - g$ est solution de $y' = ay$

⇔ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f_k - g)(x) = k \cdot e^{ax}$

⇔ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) - g(x) = k \cdot e^{ax}$

⇔ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = k \cdot e^{ax} + g(x)$.

EXEMPLE :

Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 3y + 2$.

Étape 1 : Recherche d'une solution particulière constante

Soit f la fonction constante solution de l'équation (E) : $y' = 3y + 2$.

f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3f(x) + 2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 0 = 3f(x) + 2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -2/3$

Étape 2 : Résolution de l'équation homogène associée

Soit (E') : $y' = 3y$ l'équation homogène associée à (E).

Par théorème du cours, les solutions de (E') sont les fonctions g_k définies sur $\mathbb{R}$ par $g_k(x) = k \cdot e^{(3x)}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Étape 3 : Solution générale

Ainsi, par théorème du cours, les solutions de (E) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = g_k(x) + f(x) = k \cdot e^{(3x)} - 2/3$, $k \in \mathbb{R}$.

EXERCICE :

Soit l'équation différentielle (E) : $5y' + 3y = -1$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E). On notera f_k les solutions de (E).

2) Étude des fonctions solutions f_k :

a) Tracer à la calculatrice les courbes de quelques solutions f_k de (E).

b) Conjecturer graphiquement et en fonction de k les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f_k, ainsi que leurs sens de variations.

c) Démontrer ces conjectures.

IV. Équation différentielle y' = ay + f

1. Définition

DÉFINITION :

Soit a un réel non nul et soit f une fonction continue sur un intervalle I.

L'équation différentielle $y' = ay + f$ (ou $y' - ay = f$) est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

REMARQUE :

Ici, le second membre n'est pas nécessairement un réel (contrairement aux équations du type $y' - ay = b$ vu précédemment) mais une fonction.

EXEMPLE :

Les équations différentielles $y' = -3y + 2x$ et $5y' + 7y = e^x$ sont des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

2. Résolution de l'équation différentielle y' = ay + f

PROPRIÉTÉ :

Soit a un réel non nul et soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = f$ sont les fonctions \

f_k définies sur ℝ par $f_k(x) = g_k(x) + \phi(x)$, où g_k est solution de l'équation $y' = ay$ et ϕ est une solution particulière de (E).

EXEMPLE :

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = e^x$.

1) Montrer que la fonction ϕ définie sur ℝ par $\phi(x) = -e^x$ est une solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

EXERCICE :

Soit (E) l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x + 1$.

1) On admet que (E) admet une solution particulière ϕ, fonction affine définie sur ℝ par $\phi(x) = mx + p$, avec m et p des réels. Déterminer m et p.

2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

V. Calcul de primitives

1. Tableau des primitives usuelles

Fonction f : x → ...	**Une primitive F : x → ...**	**Sur l'intervalle I = ...**
m (constante)	mx	$\mathbb{R}$
		$\mathbb{R}$

x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0;+\infty[$

2. Primitives avec fonctions composées

Dans le tableau suivant, f et g sont deux fonctions de primitives respectives F et G, et u désigne une fonction dérivable, à dérivée continue, sur un intervalle I :

Fonction f du type...	Une primitive F du type...	Conditions
$f + g$	$F + G$	Aucune
kf	kF	k réel
$u'e^u$	e^u	Aucune
$2u'u$	u^2	Aucune
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$
$u'\cos(u)$	$\sin u$	$\mathbb{R}$
$u'\sin(u)$	$-\cos u$	$\mathbb{R}$

3. Exercices d'application

EXERCICE :

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x^4 - 3x^3 - 5x^2 + \frac{7}{3}x - 2$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto 2x - 4 + \frac{3}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$
3. $f : x \mapsto x^2(x^3 - 1)^5$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 4}$ sur $]2; +\infty[$
5. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0; +\infty[$

REMARQUE :

Peut-on trouver facilement une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$?

Résumé

Points essentiels à retenir :

• **Équation différentielle $y' = f$:** Solutions = primitives de f

• **Équation différentielle $y' = ay$:** Solutions = ke^{ax}, $k \in \mathbb{R}$

• **Équation différentielle $y' = ay + b$:** Solutions = $ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$

• **Équation différentielle $y' = ay + f$:** Solutions = $ke^{ax} + \phi$, où ϕ est une solution particulière

• **Méthode générale :** Solution générale = Solution homogène + Solution particulière

• **Conditions initiales :** Permettent de déterminer la constante k

• **Tableaux de primitives :** Essentiels pour résoudre les équations différentielles

Exercices d'application

Exercices pratiques :

1. Résoudre $y' = 2x + 1$
2. Résoudre $y' = -3y$ avec $y(0) = 5$
3. Résoudre $y' = 2y + 4$
4. Résoudre $y' = -y + e^x$
5. Déterminer la solution de $y' = 3y - 6$ telle que $y(0) = 1$
6. Résoudre $2y' + y = x + 1$