Fonction Logarithme Neperien

Terminale - Matheo

COURS: Fonction Logarithme Népérien

Introduction

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle joue un rôle fondamental en analyse mathématique et trouve de nombreuses applications en sciences. Ce chapitre explore ses propriétés, son sens de variation et ses propriétés algébriques.

I. Définition de la fonction logarithme népérien

1. Définition par la fonction réciproque

Définition 1 :

Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.

Définition 2 :

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel $x > 0$, associe le réel noté $\ln(x)$ dont l'exponentielle est x.

Remarque :

L'image d'un réel strictement positif x par la fonction $\ln$ se note souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$.

Conséquences :

1. Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y, $x = e^y$ équivaut à $y = \ln x$
2. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$
3. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$

2. Preuves et propriétés fondamentales

Preuve :

(1) et (2) se déduisent directement de la définition.

(3) Pour tout réel x, si $y = \ln(e^x)$ alors d'après (1) $e^x = e^y$ donc $x = y$.

Conséquences :

$\ln 1 = 0$. En effet $e^0 = 1$ et d'après (1) ceci équivaut à $\ln 1 = 0$.

$\ln e = 1$. En effet $e^1 = e$ et d'après (1) ceci équivaut à $\ln e = 1$.

Pour tout réel λ, l'équation $\ln x = \lambda$ a pour unique solution $x = e^\lambda$ d'après (1).

Propriété 1 :

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielles et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Preuve :

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes représentatives des fonctions $\exp$ et $\ln$.

Dire que $M'(x; y)$ appartient à $\mathcal{C}'$ équivaut à dire que $M(y; x)$ appartient à $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont donc symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Courbes exp et ln symétriques

II. Sens de variation de la fonction logarithme népérien sur]0; +∞[

Propriété 2 :

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Preuve :

a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, c'est à dire que $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\ln a < \ln b$.

Conséquences :

Pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$:

- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$ et $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$
- $\ln a > 0$ équivaut à $a > 1$ et $\ln a < 0$ équivaut à $0 < a < 1$

Graphique fonction logarithme

III. Les propriétés algébriques

1. Relation fonctionnelle

Théorème 1 :

Pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Preuve :

a et b sont deux réels strictement positifs. On note $A = \ln(ab)$ et $B = \ln a + \ln b$ alors

$e^A = ab$ et $e^B = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$

donc $e^A = e^B$ d'où $A = B$ puisque la fonction exponentielle est bijective sur $\mathbb{R}$.

2. Logarithme d'un quotient

Propriété 3 :

Pour tout réel $a \in]0; +\infty[$: $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

Preuve :

Pour $a > 0$, on écrit $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1$

c'est à dire $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ d'où $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Propriété 4 :

Pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Preuve :

Pour $a > 0$ et $b > 0$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln(b)$.

3. Logarithme d'un produit de nombres réels strictement positifs

Propriété 5 :

Pour tous réels $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in]0; +\infty[$: $\ln(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + \cdots + \ln a_n$

Remarque :

Cette formule généralise la relation fonctionnelle établie dans le paragraphe 1. et peut se démontrer par récurrence.

Propriété 6 :

Pour tout réel a de $]0; +\infty[$ et tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n \ln a$.

Démonstration :

La démonstration de cette propriété se fait par récurrence et sur le signe de n.

4. Logarithme d'une racine carrée

Propriété 7 :

Pour tout réel a de $]0; +\infty[$, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

Preuve :

Pour $a > 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$ donc $\ln((\sqrt{a})^2) = \ln a$

ainsi $2\ln(\sqrt{a}) = \ln a$

d'où $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

IV. Limites de la fonction logarithme népérien

1. Limites aux bornes du domaine

Propriété 8 :

- $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Remarque :

Ces limites se déduisent des limites de la fonction exponentielle par symétrie par rapport à la droite $y = x$.

2. Croissances comparées

Propriété 9 :

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim_{x \to +\infty} (\ln x)/x^n = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Remarque :

La première limite traduit le fait que toute puissance de x croît plus vite que ln x. La seconde limite est importante pour l'étude de fonctions.

V. Dérivée de la fonction logarithme népérien

Théorème 2 :

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$(\ln x)' = 1/x$

Conséquence :

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors :

$(\ln(u(x)))' = u'(x)/u(x)$

Exemples :

- Si $f(x) = \ln(2x + 1)$ avec $x > -1/2$, alors $f'(x) = 2/(2x + 1)$
- Si $g(x) = \ln(x^2)$ avec $x \neq 0$, alors $g'(x) = 2x/x^2 = 2/x$
- Si $h(x) = \ln(\cos x)$ avec $\cos x > 0$, alors $h'(x) = -\sin x/\cos x = -\tan x$

VI. Équations et inéquations avec des logarithmes

1. Équations simples

Exemple 1 :

Résoudre $\ln x = 3$

Solution : $x = e^3$ (car $x > 0$)

Exemple 2 :

Résoudre $\ln(2x - 1) = \ln(x + 3)$

Conditions : $2x - 1 > 0$ et $x + 3 > 0$, soit $x > 1/2$
Équation : $2x - 1 = x + 3$
Solution : $x = 4$

2. Inéquations

Exemple 3 :

Résoudre $\ln x \geq 2$

Condition : $x > 0$
Équivalence : $x \geq e^2$
Solution : $S = [e^2; +\infty[$

Exemple 4 :

Résoudre $\ln(x - 1) < \ln(2x + 1)$

Conditions : $x - 1 > 0$ et $2x + 1 > 0$, soit $x > 1$

Inéquation : $x - 1 < 2x + 1 \iff -2 < x$

Solution : $S =]1; +\infty[$

VII. Applications et études de fonctions

1. Fonction $x \mapsto x \ln x$

Étude de $f(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$:

Dérivée : $f'(x) = \ln x + x \times (1/x) = \ln x + 1$

Signe de f' : $f'(x) > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1} = 1/e$

Variations :

- f décroissante sur $]0; 1/e[$
- f croissante sur $]1/e; +\infty[$
- Minimum en $x = 1/e$: $f(1/e) = -1/e$

Limites :

- $\lim(x\to 0^+)\ x \ln x = 0$
- $\lim(x\to +\infty)\ x \ln x = +\infty$

2. Fonction $x \mapsto \ln x/x$

Étude de $g(x) = (\ln x)/x$ sur $]0; +\infty[$:

Dérivée : $g'(x) = (1/x \times x - \ln x \times 1)/x^2 = (1 - \ln x)/x^2$

Signe de g' : $g'(x) > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e$

Variations :

- g croissante sur $]0; e[$
- g décroissante sur $]e; +\infty[$
- Maximum en $x = e$: $g(e) = 1/e$

Limites :

- $\lim_{x\to 0^+} (\ln x)/x = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} (\ln x)/x = 0$

Graphiques fonctions avec ln

VIII. Primitive et intégration

Propriété 10 :

Une primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $]0; +\infty[$ est la fonction $x \mapsto \ln x$.

Plus généralement, si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors une primitive de u'/u est $\ln u$.

Exemples :

- $\int 1/x \, dx = \ln x + C$ (sur $]0; +\infty[$)
- $\int 2x/(x^2 + 1) \, dx = \ln(x^2 + 1) + C$

- $\int \tan x \, dx = \int \sin x/\cos x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

- $\int 1/(2x + 3) \, dx = \frac{1}{2} \ln|2x + 3| + C$

IX. Équations différentielles

1. Équation y' = ay (a constante)

Théorème 3 :

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (où a est une constante réelle) sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = Ce^{ax}$$

où C est une constante réelle.

2. Résolution par séparation des variables

Méthode :

Pour résoudre $y' = ay$ avec $y(x_0) = y_0$:

1. Séparer les variables : $dy/y = a \, dx$
2. Intégrer : $\int dy/y = \int a \, dx$
3. Obtenir : $\ln|y| = ax + C$
4. Donc : $y = Ke^{ax}$ où $K = \pm e^C$
5. Utiliser la condition initiale pour déterminer K

Résumé

Points essentiels à retenir :

- **Définition :** ln est la fonction réciproque de exp, définie sur]0; +∞[
- **Propriétés fondamentales :** $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln x} = x$
- **Valeurs particulières :** $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
- **Sens de variation :** ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- **Propriétés algébriques :** $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, $\ln(a^n) = n \ln a$
- **Limites :** $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- **Dérivée :** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- **Primitive :** $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- **Croissances comparées :** ln x croît moins vite que toute puissance positive de x

Exercices d'application

Exercices pratiques :

1. Calculer $\ln(8) - \ln(2) + \ln(1/4)$
2. Résoudre l'équation $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(8)$
3. Étudier les variations de $f(x) = \ln(x^2)$
4. Déterminer les limites de $g(x) = x \ln x$ en 0^+ et $+\infty$

5. Calculer la dérivée de $h(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1})$
6. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ avec $y(0) = 3$
7. Calculer $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$