Fonctions Continues

Terminale - Matheo

CONTINUITÉ DES FONCTIONS

I. NOTION DE CONTINUITÉ

1) Définition intuitive

DÉFINITION:

Une fonction \(f\) est continue en un point \(a\) si on peut tracer sa courbe représentative en ce point "sans lever le crayon".

REMARQUE:

La continuité d'une fonction en un point signifie qu'il n'y a pas de "saut" ou de "trou" dans la courbe en ce point.

Fonction continue

Fonction discontinue

2) Définition mathématique

DÉFINITION:

Soit \(f\) une fonction définie sur un intervalle \(I\) contenant un réel \(a\).

• (f) est continue en (a) si $(\lim_{x \to a} f(x) = f(a))$

• \(f\) est continue sur \(I\) si \(f\) est continue en tout point de \(I\)

EXEMPLES:

- Les fonctions \(x \mapsto |x|\), \(x \mapsto x^n\) (\(n \in \mathbb{N}\)) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur \(\mathbb{R}\)
- Les fonctions $(f(x) = \sin x)$ et $(g(x) = \cos x)$ sont continues sur (\mathbb{R})
- La fonction $(h(x) = \sqrt{x})$ est continue sur $([0; +\sqrt{y}])$
- La fonction $(k(x) = \frac{1}{x})$ est continue sur $(]-\frac{0}{x}$ et sur $(]0; +\frac{0}{x}$

II. THÉORÈME FONDAMENTAL

THÉORÈME:

Une fonction dérivable sur un intervalle \(I\) est continue sur cet intervalle.

REMARQUE:

La réciproque est fausse ! Une fonction peut être continue sans être dérivable (exemple : (f(x) = |x|) en 0).

III. ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Méthode d'étude

MÉTHODE:

Pour étudier la continuité d'une fonction \(f\):

- 1. Identifier les points "suspects" (changement de définition, valeurs interdites)
- 2. Calculer les limites à gauche et à droite en ces points
- 3. Comparer avec la valeur de la fonction en ces points
- 4. Conclure sur la continuité

Exemple d'application

EXEMPLE:

On considère la fonction \(f\) définie sur \(\mathbb{R}\) par :

```
\[f(x) = \begin{cases}
-x + 2 & \text{si } x < 3 \\
x - 4 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\
-2x + 13 & \text{si } x \geq 5
\end{cases}\]
```

Fonction par morceaux

ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ:

- En (x = 3):
 - \(\lim $\{x \to 3^-\}\ f(x) = \lim \{x \to 3^-\}\ (-x + 2) = -1 \)$
 - $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x 4) = -1$
 - $\backslash (f(3) = 3 4 = -1 \backslash)$

Donc \(f\) est continue en 3.

- En (x = 5):

 - \(\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (-2x + 13) = 3\)

Les limites à gauche et à droite sont différentes, donc \((f\)) n'est pas continue en 5.

IV. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

1) Énoncé du théorème

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES :

Soit (f) une fonction définie et continue sur un intervalle ([a; b]).

Pour tout réel (k) compris entre (f(a)) et (f(b)), il existe au moins un réel (c) entre (a) et (b) tel que (f(c) = k).

Théorème des valeurs intermédiaires

2) Conséquences

CONSÉQUENCE:

Sous ces conditions, l'équation (f(x) = k) admet au moins une solution dans l'intervalle ([a; b]).

APPLICATION:

Ce théorème est très utile pour :

- Résoudre des équations
- Montrer l'existence de solutions
- Encadrer des solutions

3) Cas particulier: fonction strictement monotone

THÉORÈME:

Si \(f\) est continue et strictement monotone sur \([a; b]\), alors pour tout \((k\) compris entre \((f(a)\)) et \((f(b)\)), l'équation \((f(x) = k\)) admet une unique solution dans \(([a; b]\)).

V. EXEMPLES D'APPLICATION

Exemple 1: Résolution d'équation

EXEMPLE:

Montrer que l'équation $(x^3 - 3x + 1 = 0)$ admet au moins une solution dans ([0; 2]).

SOLUTION:

Soit $(f(x) = x^3 - 3x + 1)$.

- \(f\) est continue sur \(\mathbb{R}\) (fonction polynôme)
- $\backslash (f(0) = 1 \backslash)$ et $\backslash (f(2) = 8 6 + 1 = 3 \backslash)$
- $\setminus (0)$ est compris entre $\setminus (f(0) = 1)$ et $\setminus (f(2) = 3)$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (f(x) = 0) admet au moins une solution dans ([0; 2]).

Exemple 2 : Encadrement de solution

EXEMPLE:

Encadrer la solution de l'équation $(e^x = x + 2)$ à (10^{-2}) près.

SOLUTION:

Soit $(f(x) = e^x - x - 2)$.

- \(f\) est continue sur \(\mathbb{R}\)
- $\setminus (f(0) = 1 0 2 = -1 < 0 \setminus)$
- $\backslash (f(1) = e 1 2 \backslash 2,72 3 = -0.28 < 0 \backslash)$
- $\backslash (f(2) = e^2 2 2 \backslash pprox 7,39 4 = 3,39 > 0 \backslash e$

La solution est dans ([1; 2]).

En affinant : $(f(1,5) \cdot 0,48 > 0)$, donc la solution est dans ([1; 1,5]).

 $(f(1,2) \cdot -0,07 < 0)$, donc la solution est dans ([1,2; 1,5]).

 $(f(1,3) \cdot 0,17 > 0)$, donc la solution est dans ([1,2; 1,3]).

La solution est encadrée par $(1,2 < \alpha < 1,3)$.

VI. RÉSUMÉ

POINTS CLÉS:

- Une fonction est continue en un point si sa limite en ce point est égale à sa valeur
- Toute fonction dérivable est continue
- Le théorème des valeurs intermédiaires permet de résoudre des équations
- La continuité est essentielle pour l'étude des fonctions

MÉTHODES:

- Pour étudier la continuité : calculer les limites à gauche et à droite
- Pour résoudre (f(x) = k) : utiliser le TVI sur un intervalle approprié
- Pour encadrer une solution : affiner l'intervalle par dichotomie

Généré par Matheo - Assistant IA pour les mathématiques

Date de génération : 31/10/2025 à 15:06