Fonctions Continues

Terminale - Matheo

CONTINUITÉ DES FONCTIONS

I. NOTION DE CONTINUITÉ

1) Définition intuitive

DÉFINITION :

Une fonction f est continue en un point a si on peut tracer sa courbe représentative en ce point "sans lever le crayon".

REMARQUE :

La continuité d'une fonction en un point signifie qu'il n'y a pas de "saut" ou de "trou" dans la courbe en ce point.

Fonction continue

Fonction discontinue

2) Définition mathématique

DÉFINITION :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel a.

- f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

• f est continue sur I si f est continue en tout point de I

EXEMPLES :

• Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$

• Les fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$

• La fonction $h(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$

• La fonction $k(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

II. THÉORÈME FONDAMENTAL

THÉORÈME :

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

REMARQUE :

La réciproque est fausse ! Une fonction peut être continue sans être dérivable (exemple : $f(x) = |x|$ en 0).

III. ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Méthode d'étude

MÉTHODE :

Pour étudier la continuité d'une fonction f :

1. Identifier les points "suspects" (changement de définition, valeurs interdites)
2. Calculer les limites à gauche et à droite en ces points
3. Comparer avec la valeur de la fonction en ces points
4. Conclure sur la continuité

Exemple d'application

EXEMPLE :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases}
-x + 2 & \text{si } x < 3 \\
x - 4 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\
-2x + 13 & \text{si } x \geq 5
\end{cases}$$

Fonction par morceaux

ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ :

- En $x = 3$:
  - $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (-x + 2) = -1$
  - $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - 4) = -1$
  - $f(3) = 3 - 4 = -1$

Donc f est continue en 3.

- En $x = 5$:
  - $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (x - 4) = 1$
  - $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (-2x + 13) = 3$

Les limites à gauche et à droite sont différentes, donc f n'est pas continue en 5.

IV. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

1) Énoncé du théorème

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c entre a et b tel que $f(c) = k$.

Théorème des valeurs intermédiaires

2) Conséquences

CONSÉQUENCE :

Sous ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

APPLICATION :

Ce théorème est très utile pour :

- Résoudre des équations
- Montrer l'existence de solutions
- Encadrer des solutions

3) Cas particulier : fonction strictement monotone

THÉORÈME :

Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.

V. EXEMPLES D'APPLICATION

Exemple 1 : Résolution d'équation

EXEMPLE :

Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 2]$.

SOLUTION :

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)
- $f(0) = 1$ et $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$
- 0 est compris entre $f(0) = 1$ et $f(2) = 3$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 2]$.

Exemple 2 : Encadrement de solution

EXEMPLE :

Encadrer la solution de l'équation $e^x = x + 2$ à 10^{-2} près.

SOLUTION :

Soit $f(x) = e^x - x - 2$.

• f est continue sur $\mathbb{R}$

• $f(0) = 1 - 0 - 2 = -1 < 0$

• $f(1) = e - 1 - 2 \approx 2,72 - 3 = -0,28 < 0$

• $f(2) = e^2 - 2 - 2 \approx 7,39 - 4 = 3,39 > 0$

La solution est dans $[1; 2]$.

En affinant : $f(1,5) \approx 0,48 > 0$, donc la solution est dans $[1; 1,5]$.

$f(1,2) \approx -0,07 < 0$, donc la solution est dans $[1,2; 1,5]$.

$f(1,3) \approx 0,17 > 0$, donc la solution est dans $[1,2; 1,3]$.

La solution est encadrée par $1,2 < \alpha < 1,3$.

VI. RÉSUMÉ

POINTS CLÉS :

• Une fonction est continue en un point si sa limite en ce point est égale à sa valeur

• Toute fonction dérivable est continue

• Le théorème des valeurs intermédiaires permet de résoudre des équations

• La continuité est essentielle pour l'étude des fonctions

MÉTHODES :

• Pour étudier la continuité : calculer les limites à gauche et à droite

• Pour résoudre $f(x) = k$: utiliser le TVI sur un intervalle approprié

• Pour encadrer une solution : affiner l'intervalle par dichotomie

---

Généré par Matheo - Assistant IA pour les mathématiques

Date de génération : 25/02/2026 à 03:46