# Fonctions Trigonométriques

Terminale - Matheo

# FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

# I. DÉFINITION DES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

# 1) Le cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $((0; \sqrt{i}, \sqrt{j}))$ .

À tout réel \(t\), on associe un unique point \(M\) du cercle trigonométrique (cercle de centre \(O\) et de rayon 1) tel que \(t\) soit la mesure de l'angle orienté \((\vec{i}, \overrightarrow{OM})\) en radians.

Le point \(M\) a pour coordonnées \((\cos t; \sin t)\).

Cercle trigonométrique

#### **REMARQUE:**

Pour tout réel  $(t \in \mathbb{R})$ , les valeurs de  $(\cos t)$  et  $(\sin t)$  sont toujours comprises entre -1 et 1. Autrement dit :

```
\( -1 \le \cos t \le 1 \)
```

\( -1 \le \sin t \le 1 \)

## 2) Définition des fonctions sinus et cosinus

#### **DÉFINITION:**

- La fonction qui à tout réel \(x\) fait correspondre l'abscisse \(\cos x\) du point \(M\) est appelée la **fonction cosinus** et est notée \(\cos\).
- La fonction qui à tout réel \(x\) fait correspondre l'ordonnée \(\\sin x\) du point \(M\) est appelée la **fonction sinus** et est notée \(\\\sin\).

# II. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

## 1) Parité des fonctions sinus et cosinus

## PROPRIÉTÉ (admise) :

- Pour tout réel \(x\), \(\\cos(-x) = \\cos x\): on dit que la fonction cosinus est paire sur \(\\mathbb{R}\\).
- Pour tout réel \(x\), \(\sin(-x) = -\sin x\): on dit que la fonction sinus est impaire sur \(\mathbb{R}\).

# 2) Interprétation graphique de la parité

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $((0; \sqrt{i}, \sqrt{j}))$ .

# \* Pour la fonction cosinus (paire) :

Les points  $(M(x; \cos x))$  et  $(M'(-x; \cos(-x)))$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées  $((O; \sqrt{j}))$ . La courbe représentative de la fonction cosinus est donc **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Courbe cosinus parité

## \* Pour la fonction sinus (impaire) :

Les points  $(M(x; \sin x))$  et  $(M'(-x; \sin(-x)))$  sont symétriques par rapport à

l'origine \(O\) du repère. La courbe représentative de la fonction sinus est donc symétrique par rapport à l'origine \(O\) du repère.

Courbe sinus parité

3) Périodicité des fonctions sinus et cosinus

## PROPRIÉTÉ (admise) :

Pour tout réel \(x\), on a :

$$(\cos(x + 2\pi) = \cos x)$$

$$( \sin(x + 2\pi) = \sin x )$$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période** \(2\pi\) (ou « \(2\pi\)-périodiques »). Cela signifie que leurs courbes représentatives se répètent tous les \(2\pi\) sur l'axe des abscisses.

Périodicité des fonctions trigonométriques

# III. DÉRIVÉES DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1) Dérivées des fonctions sinus et cosinus

# PROPRIÉTÉ (admise) :

Les fonctions sinus et cosinus sont définies et dérivables sur  $\mbox{\mbox{\mbox{$\sim$}}}$  \) et :

- Pour tout  $(x \in \mathbb{R})$ ,  $(\sin' x = \cos x)$
- Pour tout  $(x \in \mathbb{R})$ ,  $(\cos' x = -\sin x)$

# 2) Dérivées de fonctions composées

#### PROPRIÉTÉ:

Soit (u) une fonction définie et dérivable sur un intervalle (I). Alors les fonctions  $(\cos u)$  et  $(\sin u)$  sont dérivables sur (I) et :

- \((\cos u)' = -u' \sin u\)
- \((\sin u)' = u' \cos u\)

#### **EXEMPLE:**

Soient (f) et (g) les fonctions définies sur  $(\mathbb{R})$  par :

- $\langle f(x) = \sin(x^2+1) \rangle$
- $(g(x) = \frac{1+e^x}{e^x})$

Déterminer pour tout réel (x), (f'(x)) et (g'(x)).

#### **SOLUTION:**

• Pour  $\langle f(x) = \sin(x^2+1) \rangle$ :

On pose  $(u(x) = x^2 + 1)$ , donc (u'(x) = 2x)

 $\label{eq:final_cos} $$ (f'(x) = u'(x) \cos u(x) = 2x \cos(x^2+1) . $$$ 

• Pour  $(g(x) = \frac{1+e^x}{e^x}) :$ 

On pose  $(u(x) = 1+e^x)$ , donc  $(u'(x) = e^x)$ 

$$\label{eq:cos} $$ (g'(x) = \frac{-u'(x) \sin u(x) \cdot e^x - \cos u(x) \cdot e^x}{(e^x)^2} ) $$ (g'(x) = \frac{-e^x \sin(1+e^x) - \cos(1+e^x)}{e^x} ) $$ (g'(x) = -\sin(1+e^x) - \frac{-e^x}{e^x} ) $$ (g'(x) = -\cos(1+e^x) - \frac{-e^x}{e^x} ) $$ (g'(x)$$

# IV. ÉTUDE DES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

# 1) Sens de variation de la fonction cosinus

Pour étudier le sens de variation de la fonction cosinus, nous étudions le signe de sa dérivée  $(-\sin(x))$ .

Cercle trigonométrique signe sinus

\(x\)	\(0\)	\(\pi\)	
$(\cos'(x) = -\sin(x))$	\(0\)	\(-\)	\(0\)
\(\cos(x)\)	\(1\)	\(\searrow\)	\(-1\)

On en déduit le sens de variations de la fonction cosinus sur \([-\pi; \pi]\) par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées (car la fonction est paire) :

\(x\)	\(-\pi\)	\(0\)	\(\pi\)		
\(\cos(x)\)	\(-1\)	\(\nearrow\)	\(1\)	\(\searrow\)	\(-1\)

# 2) Sens de variation de la fonction sinus

Pour étudier le sens de variation de la fonction sinus, nous étudions le signe de sa dérivée  $(\cos(x))$ .

Cercle trigonométrique signe cosinus

\(x\)	\(- \pi\)	\(-\frac{\pi} {2}\)	\(0\)	\(\frac{\pi} {2}\)	\ (\pi\)
-------	--------------	------------------------	-------	-----------------------	-------------

\(\sin'(x) = \cos(x) \)	\(-\)	\(0\)	\(+	\(0\)	\(-\)		
\(\sin(x)\)	\(0\)	\(\searrow\)	\ (-1\)	\(\nearrow\)	\(1\)	\ (\searrow\)	\(0\)

# 3) Courbes représentatives

Voici un tableau des valeurs remarquables pour les fonctions sinus et cosinus :

\(x\)	\(0\)	\(\frac{\pi} {6}\)	\(\frac{\pi} {4}\)	\(\frac{\pi} {3}\)	\ (\frac{\pi} {2}\)	\(\f
\ (\sin(x) \)	\(0\)	\(\frac{1}{2}\)	\ (\frac{\sqrt{2}} {2}\)			(\frac
\ (\cos(x) \)	\(1\)	\ (\frac{\sqrt{3}} {2}\)	\ (\frac{\sqrt{2}} {2}\)	\(\frac{1}{2}\)	\(0\)	\(-\fra

Courbe représentative cosinus

Courbe représentative sinus

# V. LIMITES DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

# PROPRIÉTÉ:

Les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limites en  $(+\inf y)$  ou en  $(-\inf y)$ .

R	F	M	IΛ	R	0	П	ΙE	
$\mathbf{r}$	_	•	_	П	v	u		

En revanche, une fonction « contenant » un sinus ou un cosinus peut admettre une limite en \(+\infty\) ou en \(-\infty\).

#### **Exemples:**

- $\langle \lim_{x \to \infty} (x^2 + \cos(x)) = + \inf(y) \rangle$
- \(\lim  $\{x \to + \inf y\} \cdot \{x\} = 0$ \)

# VI. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

1) Équations trigonométriques

## PROPRIÉTÉ (admise) :

Soient \(a\) et \(x\) deux nombres réels.

- \(\\cos(x) = \\cos(a) \\Leftrightarrow x = a + 2k\\pi\) ou \(x = -a + 2k\\pi\), avec \(k \\ in \\mathbb{Z}\\)
- \(\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow  $x = a + 2k \pi \)$  ou \(x = \pi a + 2k\pi\), avec \(k \in \mathbb{Z}\)

#### **EXEMPLES:**

- Résoudre dans  $(\mathbb{R})\$  l'équation :  $(\cos(x) = -\frac{1}{2}\)$
- Résoudre dans \([-\pi; \pi]\), puis dans \([0; 3\pi]\), l'équation : \  $(\sqrt{2}\sin(x) + 3 = 2)$

#### **SOLUTION:**

#### **Premier exemple:**

```
((\cos(x) = -\frac{1}{2}))
```

On sait que  $(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ 

Donc  $(\cos(x) = \cosh(\frac{2\pi}{3}\right))$ 

 $D'où \(x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi) ou \(x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi), avec \(k \in \mathbb{Z}\)$ 

## Deuxième exemple:

 $(\sqrt{2}\sin(x) + 3 = 2)$ 

 $\langle x = -1 \rangle$ 

 $\(\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{2}\)$ 

On sait que  $(\left(\frac{\pi \left(\frac{\pi}{4}\right)}{4}\right) = -\left(\frac{2}{2}\right)$ 

Donc  $\langle \sin(x) = \sinh(-\frac{\pi}{4}\right)$ 

D'où \(x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\) ou \(x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\), avec \(k \in \mathbb{Z}\)

Dans  $(]-\pi; \pi]$ ) :  $(x = -\frac{\pi}{4})$ 

Dans \([0;  $3\pi$ ]\) : \(x = \frac{5\pi}{4}\) et \(x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{13\pi}{4}\)

# 2) Inéquations trigonométriques

#### **EXERCICE:**

Résoudre dans \([-\pi; \pi]\) puis dans \([0; 2\pi]\) l'inéquation : \(\\cos(x) \leq \\frac{\sqrt{3}}{2}\)

#### **SOLUTION:**

On sait que  $(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ 

En utilisant les variations de la fonction cosinus sur \([-\pi; \pi]\):

- Sur \(\left[-\pi; -\frac{\pi}{6}\right]\) : \(\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\)
- Sur \(\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]\): \(\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\)

Donc dans  $\[-\pi; \pi]\) : \(x \in \left[\frac{\pi}{6}\right] \$ 

Dans  $([0; 2\pi]) : (x \in \{frac{\pi}{6}; frac{11\pi}{6}\right)$ 

# VII. RÉSUMÉ

#### **POINTS CLÉS:**

 Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur \(\mathbb{R}\\) et périodiques de période \(2\pi\)

- La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire
- Leurs dérivées sont : \(\sin'  $x = \cos x$ \) et \(\\cos'  $x = -\sin x$ \)
- Elles n'admettent pas de limites en \(\pm\infty\)
- Les équations trigonométriques se résolvent en utilisant les propriétés de périodicité

#### **MÉTHODES:**

- Pour étudier les variations : utiliser les dérivées
- Pour résoudre  $(\cos(x) = \cos(a)) : (x = a + 2k\pi) ou (x = -a + 2k\pi)$
- Pour résoudre  $\langle \sin(x) = \sin(a) \rangle$ :  $\langle x = a + 2k \rangle$  ou  $\langle x = \pi + 2k \rangle$
- Pour les inéquations : utiliser les variations et la périodicité

Généré par Matheo - Assistant IA pour les mathématiques

Date de génération : 31/10/2025 à 15:12