Integration

Terminale - Matheo

COURS: Le Calcul Intégral

Introduction

Le calcul intégral est une branche fondamentale des mathématiques qui permet de calculer des aires, des volumes et de résoudre de nombreux problèmes pratiques. Ce chapitre explore la notion d'intégrale, ses propriétés et ses applications géométriques.

I. Notion d'intégrale

1. Aire sous la courbe

Définition 1 :

On considère une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. On appelle aire sous la courbe de f sur $[a; b]$ l'aire du domaine plan délimité par :

• L'axe des abscisses
• Les droites d'équations $x = a$ et $x = b$
• La courbe représentative de la fonction f

Unité d'aire

Remarque :

L'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle défini par les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ du repère orthonormé.

2. Intégrale d'une fonction positive

Définition 2 :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$. L'intégrale de f sur $[a; b]$, notée $\int_a^b f(t) \, dt$, est l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$, et la courbe représentative de f.

Remarque :

La variable t est une variable muette : $\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(u) \, du$

Exemple :

Calculons $\int_1^4 (2t - 1) \, dt$ où $f(t) = 2t - 1$ sur $[1; 4]$.

Cette intégrale représente l'aire d'un trapèze de sommets :
• $A(1; 0)$, $B(1; 1)$, $C(4; 7)$, $D(4; 0)$

Aire du trapèze = $\frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$

= $\frac{(1 + 7) \times 3}{2} = 12$ u.a.

Aire trapèze

3. Extension à une fonction de signe quelconque

Définition 3 :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$:

• Si $f \leq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) \, dt = -A$ où A est l'aire

• Si f est de signe quelconque, on détermine les intervalles où f est positive et négative, puis :

$\int_a^b f(t) \, dt = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$

Intégrale signe quelconque

4. Valeur moyenne d'une fonction

Définition 4 :

La valeur moyenne de la fonction f continue sur $[a; b]$ est le réel :

$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$

II. Propriétés de l'intégrale

1. Propriétés algébriques

Propriétés :

Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle I, et $a, b, c \in I$:

- $\int_a^a f(t) \, dt = 0$
- $\int_a^b f(t) \, dt = -\int_b^a f(t) \, dt$
- **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt$
- **Linéarité :**
  - $\int_a^b k \cdot f(t) \, dt = k \int_a^b f(t) \, dt$ (où $k \in \mathbb{R}$)

- $\int_a^b [f(t) + g(t)] \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_a^b g(t) \, dt$

2. Intégrales et inégalités

Propriétés :

Soit f et g des fonctions continues sur $[a; b]$ avec $a < b$:

- **Positivité :** Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) \, dt \geq 0$
- **Ordre :** Si $f \geq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) \, dt \geq \int_a^b g(t) \, dt$
- **Inégalité de la moyenne :**

Si $\forall x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b-a)$

c'est-à-dire que la valeur moyenne μ de f vérifie $m \leq \mu \leq M$

Si $\forall x \in [a; b]$, $|f(x)| \leq M$, alors :

$|\int_a^b f(t) \, dt| \leq M(b-a)$

III. Primitives d'une fonction

1. Notion de primitive

Définition 5 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemples :

- Une primitive de $f(x) = 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = x^2 - x + 1$

- Une primitive de $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \frac{x^3}{3}$

2. Ensemble des primitives et conditions initiales

Propriété :

Toute fonction f continue sur I admet une infinité de primitives sur I.

Si F est une primitive de f, alors les autres primitives de f sont les fonctions de la forme $F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Alors f admet une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$ (appelée condition initiale).

Exemple :

La primitive de $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$ est :

$F(x) = \frac{x^3 + 5}{3}$

3. Intégrale et primitive

THÉORÈME - Lien intégrale-primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.

La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration :

La démonstration est faite dans le cas où f est positive et croissante.

Soit $x_0 \in I$ et $x > x_0$. Pour tout $t \in [x_0; x]$, on a $f(x_0) \leq f(t) \leq f(x)$ par croissance de f.

Ainsi, par le théorème de la moyenne :

$f(x_0)(x-x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) \, dt \leq f(x)(x-x_0)$

En divisant par $(x-x_0)$ et en passant à la limite, on obtient $F'(x_0) = f(x_0)$.

IV. Théorème fondamental du calcul intégral

1. Le théorème

THÉORÈME FONDAMENTAL

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

Alors $\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f.

2. Notation

Notation :

$\int_a^b f(t) \, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

3. Démonstration

Démonstration :

Soit F la primitive de f qui s'annule en a, alors $F(b) = \int_a^b f(t) \, dt$.

Soit G une primitive quelconque de f, alors $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Donc $G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) = \int_a^b f(t) \, dt$.

V. Tableau des primitives

Tableau des primitives usuelles :

Dans le tableau, u' est une fonction définie et continue sur l'intervalle I.

Fonction	**Primitives**	**Définie sur**
$f(x) = a$ (constante)	$F(x) = ax + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\|x\| + k$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$u' \cdot e^u$	$e^u + k$	I
$u' \cdot u^n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + k$	I si $n \geq 0$ $I \cap \{x, u(x) \neq 0\}$ si $n < 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + k$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln(-u) + k$	$u(x) < 0$ sur I

Exemples :

- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ → $F(x) = -\frac{1}{x} + k$

- $f(x) = 2x \cdot e^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$ → $F(x) = e^{x^2-1} + k$

- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est de la forme $u'u$ → $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k$

VI. Intégration par parties

1. La formule

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $a, b \in I$.

Alors $\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$

2. Démonstration

Démonstration :

De la formule $(uv)' = u'v + uv'$, on tire $uv' = (uv)' - u'v$.

En intégrant sur $[a; b]$:

$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) \, dx - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$

$= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$

3. Applications

Applications :

On peut calculer des intégrales portant sur des fonctions dont on ne peut pas facilement déterminer une primitive. On peut aussi déterminer des primitives.

Exemples :

a) Déterminer $\int_0^1 x \cdot e^x \, dx$

b) Déterminer une primitive de $\ln x$ sur $]0; +\infty[$

Règles générales :

- Pour les fonctions de la forme $P(x)e^x$ où P est un polynôme
- Pour les fonctions de la forme $P(x)\ln x$ où P est un polynôme

VII. Calculs d'aires et de volumes

1. Calculs d'aires

THÉORÈME - Aire entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$.

L'aire du domaine délimité par les courbes de f et g et les droites $x = a$ et $x = b$ est :

$\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx$

Aire entre deux courbes

Exemple :

Déterminer l'aire entre les courbes $y = x^2$ et $y = x^3$ sur $[0; 1]$.

- Points d'intersection : $x^2 = x^3 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$
- Sur $[0; 1]$, on a $x^3 \leq x^2$
- Aire = $\int_0^1 (x^2 - x^3) \, dx = \frac{1}{12}$ u.a.

2. Calculs de volumes

Définition 6 :

Soit un solide limité par les plans $z = a$ et $z = b$.

Si $S(z)$ est l'aire de la section du solide par un plan perpendiculaire à l'axe (Oz) en z, alors :

$\mathcal{V} = \int_a^b S(z) \, dz$

Volume par section

3. Volume d'un solide de révolution

Propriété :

Soit une région limitée par $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ et l'axe (Ox) tournant autour de l'axe (Ox).

La section du solide par un plan perpendiculaire à (Ox) est un disque de rayon $|f(x)|$.

Le volume est : $\mathcal{V} = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$

Solide de révolution

Exemple :

On considère le paraboloïde construit en faisant tourner la parabole $y = x^2$ sur $[0; 1]$ autour de l'axe (Oy).

Le paraboloïde est compris entre les plans $y = 0$ et $y = 1$.

La section par le plan perpendiculaire à (Oy) est un disque de rayon x, donc d'aire $\pi x^2 = \pi y$.

Volume = $\int_0^1 \pi y \, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$ u.v.

Résumé

Points essentiels à retenir :

- **Définition :** L'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ représente l'aire sous la courbe de f sur $[a; b]$
- **Théorème fondamental :** $\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f
- **Propriétés :** Linéarité, relation de Chasles, inégalités
- **Primitives :** Table des primitives usuelles à connaître

- **Intégration par parties :** $\int u v' = [uv] - \int u' v$
- **Applications :** Calcul d'aires entre courbes et volumes de révolution
- **Valeur moyenne :** $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$

Exercices d'application

Exercices pratiques :

1. Calculer $\int_0^1 (3x^2 + 2x - 1) \, dx$
2. Déterminer une primitive de $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$
3. Calculer $\int_1^e x \ln x \, dx$ par intégration par parties
4. Déterminer l'aire entre $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sur $[0; 1]$
5. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de $y = x^2$ autour de (Ox) sur $[0; 2]$
6. Déterminer la valeur moyenne de $f(x) = \sin x$ sur $[0; \pi]$

Généré par Matheo - Assistant IA pour les mathématiques

Date de génération : 25/02/2026 à 03:40