Primitives

Terminale - Matheo

COURS: Primitives et Calcul d'une intégrale

Introduction

Le concept de primitive est fondamental en analyse mathématique. Il permet de "remonter" le processus de dérivation et constitue la base du calcul intégral. Ce chapitre explore la notion de primitive, ses propriétés et son lien avec le calcul d'intégrales.

I. Primitive

1. Définition

Définition :

Soit \(f\) une fonction définie sur un intervalle \(I\).

On appelle primitive de \(f\) sur \(I\), toute fonction \(F\) dérivable sur \(I\) dont la dérivée \(F'\) est égale à \(f\).

Exemple :

Soit \(f\) la fonction définie sur \(\mathbb{R}\) par \(f(x) = 5x + 2\).

Les fonctions \(F\) et \(G\) définies sur \(\mathbb{R}\) par :

- $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x - 7$
- $G(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x + 8$

sont des primitives de f.

2. Ensemble des primitives d'une fonction

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose qu'il existe une primitive F de f sur I.

L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k décrit $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit G une primitive de f sur I. On a donc $G' = F' = f$.

Donc pour tout $x \in I$, on a $(G-F)'(x) = 0$.

Donc la fonction $G - F$ est constante sur l'intervalle I, il existe donc un réel k tel que pour tout $x \in I$, on a $(G-F)(x) = k$ d'où $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Réciproquement soit G la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

On a $G'(x) = F'(x) + 0$ donc $G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ donc G est une primitive de f sur I.

Remarques :

- Si la fonction f admet une primitive sur un intervalle I alors elle en admet une infinité.

- Soit G et F deux primitives de f sur I tels que $G(x) = F(x) + k$, alors dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de G est obtenue à partir de la courbe représentative de F par translation de vecteur $k\vec{j}$.

3. Primitive prenant une valeur donnée en un réel donné

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet des primitives sur I. Soit x_0 et y_0 deux réels tels que $x_0 \in I$.

Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Preuve :
Existence :

La fonction f admet des primitives, soit G une primitive de f.

On considère la fonction F définie par $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$.

F est aussi une primitive de f car $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

De plus on a $F(x_0) = G(x_0) - G(x_0) + y_0 = y_0$.

Donc F existe.

Unicité :

Soit H une autre primitive de f vérifiant $H(x_0) = y_0$.

On sait qu'il existe un réel k tel que $H(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Donc en particulier on a $H(x_0) = F(x_0) + k$ d'où $y_0 = y_0 + k$ donc $k = 0$ donc $H = F$.

La fonction F est donc bien unique.

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

Déterminer la primitive F de f telle que $F(3) = -5$.

Réponse :

On vérifie facilement que les primitives de f sont $F(x) = x^2 + 3x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Si on veut $F(3) = -5$ alors $3^2 + 3 \times 3 + k = -5$ d'où $k = -23$.

La primitive cherchée est donc $F(x) = x^2 + 3x - 23$.

II. Primitives des fonctions usuelles

1. Tableau des primitives usuelles

Soit C un réel quelconque.

f est définie sur I par $f(x) =$	**Les primitives de f sur I sont définies par : $F(x) =$**	**L'intervalle $I =$**
k (constante)	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \geq 1$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$]0; +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$

2. Primitives et opérations sur les fonctions

Propriétés de linéarité :

Soit F et G des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :

- $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I
- Pour tout réel k, kF est une primitive de la fonction kf sur I.

Exemples :

- Les primitives de $f(x) = 3x^2$ sont $F(x) = \frac{3x^3}{3} + k = x^3 + k$, $k \in \mathbb{R}$

- Les primitives de $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2x$ sont sur $]0; +\infty[$: $F(x) = \frac{3}{x} + 5\ln(x) - x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$

3. Primitives et composées de fonctions

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	**Primitives de f sur I**	**Condition sur u**
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$	Aucune condition particulière
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$)	$\frac{1}{n-1}u^{-n+1} + C$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	$e^u + C$	Aucune condition particulière

4. Exemples d'application

Pour chaque fonction f, déterminer ses primitives et en déduire une primitive sur l'intervalle I :

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $I =]1; +\infty[$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$; $I =]2; +\infty[$

d) $f(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}$; $I =]0; +\infty[$

Réponses :

a) En utilisant la formule $u'u^n$ avec $u(x) = x^3 - 1$ on obtient : $F(x) = \frac{1}{18}(x^3 - 1)^6 + C$

b) En utilisant la formule $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 - 1$ on obtient : $F(x) = 3\sqrt{x^2 - 1} + C$

c) En utilisant la formule $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 - 4$ on obtient : $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4) + C$

d) En utilisant la formule $u'e^u$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ on obtient : $F(x) = e^{1/x} + C$

III. Calcul d'une intégrale

1. Primitive d'une fonction continue

Théorème :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a est un réel de l'intervalle I alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Preuve :
Cas où f est une fonction continue et croissante sur I.

Soit x_0 un réel de I et soit h tel que $x_0 + h$ appartienne à I.

On a $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt$

$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int^{x_0}_a f(t)dt$

D'après la relation de Chasles on a $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int^{x_0+h}_{x_0} f(t)dt$

Cas 1 : Si $h > 0$, la fonction f étant croissante, pour tout $x \in [x_0; x_0 + h]$, on a :

$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + h)$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$

Cas 2 : Si $h < 0$, la fonction f étant croissante, pour tout $x \in [x_0 + h; x_0]$, on a :

$f(x_0 + h) \leq f(x) \leq f(x_0)$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$

La fonction f est continue en x_0 donc $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Donc la fonction F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Donc F est dérivable sur I et $F' = f$. F est une primitive de f sur I.

On a $F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$. F est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a.

On peut faire une démonstration équivalente lorsque f est continue et décroissante sur I.

Exemple 1 :

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$. Déterminer le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.

Réponse :

D'après ce qui précède F est l'unique primitive de $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ qui s'annule en $x = 0$.

Donc $F'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ et $F'(0) = 0$ donc $F'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et de ce fait F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 :

Soit F la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Déterminer le sens de variation de F sur $[1; +\infty[$.

Réponse :

F est l'unique primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$.

Donc $F'(x) = \frac{1}{x}$ et $F'(1) = 0$ donc $F'(x) \geq 0$ sur $[1; +$

$\infty[$ et de ce fait F est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Remarque : $F(x) = \ln(x)$

2. Intégrales et primitives

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I. Soit F une primitive de f sur I.

On a $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Notation :

On écrit aussi $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

Preuve :

Soient F la primitive de f qui s'annule en a, on a $\int_a^x f(t)dt = F(x)$.

Or $F(a) = 0$ donc $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Si G est une autre primitive de f alors il existe un réel k tel que :

$G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Donc $G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$.

Donc on a aussi $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Exemples :

Exemple 1 : Calculer $I = \int_1^3 x^3 dx$
Réponse : $I = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$

Exemple 2 : Calculer $J = \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx$
Réponse : $J = \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2\right]_1^e = \frac{1}{2} ((\ln(e))^2 - (\ln(1))^2) = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$

Résumé

Points essentiels à retenir :

- **Définition :** Une primitive F de f sur I vérifie $F' = f$
- **Ensemble des primitives :** Si F est une primitive de f, alors toutes les primitives sont de la forme $F(x) + k$
- **Primitive unique :** Il existe une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$
- **Tableau des primitives :** Connaître les primitives des fonctions usuelles
- **Linéarité :** $(F + G)' = F' + G'$ et $(kF)' = kF'$
- **Composées :** Formules pour $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$, etc.
- **Lien avec l'intégrale :** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- **Théorème fondamental :** $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a

Exercices d'application

Exercices pratiques :

1. Déterminer une primitive de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$
2. Trouver la primitive F de $g(x) = \frac{1}{x^2}$ telle que $F(1) = 2$
3. Calculer $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$
4. Déterminer une primitive de $h(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
5. Calculer $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
6. Trouver la primitive G de $k(x) = e^{2x}$ telle que $G(0) = 1$
