

Suites Et Reccurence

Terminale - Matheo

COURS: Suites & Récurrences

Introduction

Les suites numériques sont des objets mathématiques fondamentaux qui permettent de modéliser de nombreux phénomènes évolutifs. Le raisonnement par récurrence est une méthode de démonstration puissante qui s'apparente à l'effet domino. Ce chapitre explore ces deux concepts essentiels en mathématiques.

I. Raisonnement par récurrence

1. L'effet domino

Principe fondamental :

Le raisonnement par récurrence fonctionne comme l'effet domino. Il faut deux conditions :

- **L'amorce** : Le premier domino d_0 tombe
- **La propagation** : Si un domino d_n tombe, alors le suivant d_{n+1} tombe aussi

Effet domino

Application mathématique :

Soit la suite $((u_n))$ définie par $(u_0 = 0,3)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2})$

Propriété (P) : $(\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1)$

Initialisation : $(u_0 = 0,3)$ vérifie $(0 < u_0 < 1)$ ✓

Hérédité : Si $(0 < u_n < 1)$, alors $(0 < \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} < 1)$, donc $(0 < u_{n+1} < 1)$ ✓

Conclusion : La propriété est vraie pour tout $(n \in \mathbb{N})$

2. Conjecture et raisonnement par récurrence

Méthode :

1. **Calculer les premiers termes** pour former une conjecture
2. **Démontrer l'hérédité** de la propriété
3. **Vérifier l'initialisation** pour un ou plusieurs rangs
4. **Conclure** par le principe de récurrence

Exemple :

Soit $((u_n))$ définie par $(u_0 = 0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1)$

Calculs : $(u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7, u_4 = 15, u_5 = 31)$

Conjecture : $(u_n = 2^n - 1)$

Hérédité : Si $(u_n = 2^n - 1)$, alors $(u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1)$ ✓

Initialisation : $(u_0 = 0 = 2^0 - 1)$ ✓

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1)$

3. Axiome de récurrence

Définition 1 :

Soit (P_n) une propriété définie sur $(\mathbb{N})$. Si :

- (P_n) est **initialisée** à partir du rang 0 (ou (n_0))
- (P_n) est **héréditaire** à partir du rang 0 (ou (n_0))

Alors (P_n) est vraie pour tout $(n \in \mathbb{N})$ à partir du rang 0 (ou (n_0))

Remarque :

Le raisonnement par récurrence comporte toujours deux phases :

1. **Prouver l'initialisation** : la propriété est vraie au rang de départ
2. **Prouver l'hérédité** : si la propriété est vraie au rang n , elle l'est au rang $n+1$

4. Inégalité de Bernoulli

Théorème 1 :

Pour tout réel $(a > 0)$ et pour tout $(n \in \mathbb{N})$: $[(1 + a)^n \geq 1 + na]$

Démonstration par récurrence :

Initialisation : Pour $(n = 0)$, $[(1 + a)^0 = 1]$ et $[(1 + 0 \times a = 1)]$, donc $(1 \geq 1)$ ✓

Hérédité : Supposons $[(1 + a)^n \geq 1 + na]$ (HR)

Alors $((1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \times (1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + na + a + na^2)$

Comme $(na^2 \geq 0)$, on a $((1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a)$ ✓

Conclusion : L'inégalité est vraie pour tout $(n \in \mathbb{N})$

5. Application aux suites

Exemple :

Soit (u_n) définie par $(u_0 = 1)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n})$

Propriété : $(\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < u_{n+1} < 2)$

Initialisation : $(u_0 = 1)$ et $(u_1 = \sqrt{3} \approx 1,732)$

On a bien $(0 < 1 < \sqrt{3} < 2)$ ✓

Hérédité : Supposons $(0 < u_n < u_{n+1} < 2)$ (HR)

En ajoutant 2 : $(2 < 2 + u_n < 2 + u_{n+1} < 4)$

En prenant la racine : $(\sqrt{2} < u_{n+1} < u_{n+2} < 2)$

Comme $(\sqrt{2} \approx 1,414 > 0)$, on a $(0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 2)$ ✓

Conclusion : La suite est croissante et bornée dans $]0; 2[$

6. Situations amenant à une conclusion erronée

⚠ **Attention aux pièges :**

Situation 1 : Hérédité seule vérifiée

Propriété : $(\forall n \in \mathbb{N}), 3 \text{ divise } (2^n)$

Hérédité : Si 3 divise (2^n) , alors 3 divise $(2^{n+1} = 2 \times 2^n)$ ✓

Initialisation : 3 ne divise pas $(2^0 = 1)$ ✗

Conclusion : La propriété est fausse malgré l'hérédité !

Situation 2 : Initialisation vérifiée jusqu'à un certain rang

Propriété : $(\forall n \in \mathbb{N}), (n^2 - n + 41)$ est premier

Vérification : La propriété est vraie pour $(n = 0, 1, 2, \dots, 40)$

Contre-exemple : Pour $(n = 41)$, on a $(41^2 - 41 + 41 = 41^2 = 1681 = 41 \times 41)$

Conclusion : La propriété est fausse ! L'initialisation seule ne suffit pas.

Table des valeurs

II. Limite d'une suite

1. Limite finie

Définition 2 :

On dit que la suite (u_n) a pour limite (ℓ) si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant (ℓ) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Notation : $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell)$ (la suite converge vers (ℓ))

Limite finie

Remarque :

Cette définition traduit l'accumulation des termes (u_n) autour de (ℓ) . Lorsque (ℓ) existe, la limite est unique.

Suites de référence :

Les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

- $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n^2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

ont pour limite 0

Algorithme :

Déterminer à partir de quel entier n , le terme u_n est dans un intervalle centré en l et de rayon 10^{-p} .

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$

Cette suite converge vers 0,5. Pour $p = 3$, on trouve $n = 5$.

Code Python :

```
from math import*
def lim(p):
    u=0.1
    n=0
    while abs(u-0.5)>=10**(-p):
        u=2u(1-u)
        n+=1
    return n
```

2. Limite infinie

Définition 3 :

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Notation : $\lim u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) - la suite diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Remarque :

Pour une limite $+\infty$, cette définition traduit l'idée que les termes de la suite arrivent à dépasser A , aussi grand soit-il. Une suite peut n'avoir aucune limite (ex: $u_n = (-2)^n$).

Suites de référence :

Les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

- $(\sqrt[n]{n})$, (n) , (n^2) , ..., (n^k) avec $(k \in \mathbb{N}^*)$

ont pour limite $+\infty$

Algorithme :

Déterminer à partir de quel entier n , u_n est supérieur à 10^p .

Exemple : (u_n) définie par $(u_0 = -2)$ et $(u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n + 1)$

Cette suite diverge vers $+\infty$. Pour $(p = 3)$, on trouve $(n = 25)$.

Code Python :

```
def lim(p):  
    u=-2  
    n=0  
    while u<=10**p:  
        u=4/3*u+1  
        n+=1  
    return n
```

3. Limites par comparaison et par encadrement

Théorème 2 - Théorème d'encadrement (des gendarmes) :

Soit trois suites $((u_n))$, $((v_n))$, $((w_n))$. Si à partir de $(k \in \mathbb{N})$, on a :

- $(v_n \leq u_n \leq w_n)$
- $(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell)$ et $(\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell)$

Alors $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell)$

Théorème d'encadrement ou « des gendarmes »

Soit trois suites $((u_n))$, $((v_n))$, $((w_n))$. Si à partir de $(k \in \mathbb{N})$, on a :

- $(v_n \leq u_n \leq w_n)$
- $(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell)$ et $(\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell)$

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Théorèmes de comparaison :

- Si $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Théorèmes de comparaison

Cas 1 : Si $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Cas 2 : Si $u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Exemples :

Exemple 1 : $u_n = \frac{\sin(n)}{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin(n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exemple 2 : $v_n = n + \sin(n)$

$\forall n \in \mathbb{N}, n + \sin(n) \geq n - 1$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

4. Opérations sur les limites

4.1 Limite d'une somme

Règles de calcul :

La limite d'une somme est généralement la somme des limites, sauf pour les formes indéterminées marquées F.I.

Tableau des limites d'une somme :

Si (u_n) a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.*	F.I.*	$-\infty$

*F.I. = forme indéterminée

Exemples :

Exemple 1 : $u_n = 3n + 1 + 2/n$

$\lim(3n + 1) = +\infty$ et $\lim(2/n) = 0$, donc $\lim u_n = +\infty$

Exemple 2 : $v_n = (1/3)^n + 5 - 1/n$

$\lim((1/3)^n) = 0$ et $\lim(5 - 1/n) = 5$, donc $\lim v_n = 5$

Exemple 3 : $w_n = n^2 - n + 2$ (F.I.)

$\lim(n^2) = +\infty$ et $\lim(-n + 2) = -\infty \rightarrow$ Forme indéterminée

4.2 Limite d'un produit

Règles de calcul :

La limite d'un produit est généralement le produit des limites, en appliquant la règle des signes pour les cas marqués ∞^* .

Tableau des limites d'un produit :

Si (u_n) a pour limite	l	$l \neq 0$	0	∞	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	l'	∞	∞	∞	0	l'
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$l \times l'$	∞^*	F.I.	∞^*	F.I.	∞^*

*Appliquer la règle des signes

Exemples :

Exemple 1 : $w_n = n^2 - n + 2$ (résolution de la F.I.)

$$w_n = n^2(1 - 1/n + 2/n^2)$$

$$\lim(n^2) = +\infty \text{ et } \lim(1 - 1/n + 2/n^2) = 1, \text{ donc } \lim w_n = +\infty$$

Exemple 2 : $v_n = (2 - n) \times 3^n$

$$\lim(3^n) = +\infty \text{ et } \lim(2 - n) = -\infty, \text{ donc } \lim v_n = -\infty$$

4.3 Limite d'un quotient

Règles de calcul :

La limite d'un quotient est généralement le quotient des limites, en appliquant la règle des signes pour les cas marqués ∞ ou 0.

Tableau des limites d'un quotient :

Si (u_n) a pour limite	l	$l \neq 0$	0	l	∞	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$l' \neq 0$	0	0	∞	l'	∞	∞
alors (u_n/v_n) a pour limite	l/l'	∞^*	F.I.	0	0^*	F.I.	∞^*

*Appliquer la règle des signes

(1) 0 signe constant : on écrira 0^+ pour un nombre positif et 0^- pour un nombre négatif

Exemples :

Exemple 1 : $u_n = 5/(2n^2 + 1)$

$\lim(5) = 5$ et $\lim(2n^2 + 1) = +\infty$, donc $\lim u_n = 0$

Exemple 2 : $v_n = (1 - n)/(0,5^n)$

$\lim(1 - n) = -\infty$ et $\lim(0,5^n) = 0^+$, donc $\lim v_n = -\infty$

Exemple 3 : $w_n = (n^2 + 3)/(n + 1)$ (F.I.)

$w_n = (n + 3/n)/(1 + 1/n)$

$\lim(n + 3/n) = +\infty$ et $\lim(1 + 1/n) = 1$, donc $\lim w_n = +\infty$

5. Limite d'une suite géométrique

Théorème 3 :

Soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim q^n = 0$
- Si $q \leq -1$ alors $\lim q^n$ n'existe pas

Théorème 3 - Limites des suites géométriques

Soit q un réel. On a les limites suivantes :

- **Si $q > 1$** alors $\lim q^n = +\infty$
- **Si $q = 1$** alors $\lim q^n = 1$
- **Si $-1 < q < 1$** alors $\lim q^n = 0$
- **Si $q \leq -1$** alors $\lim q^n$ n'existe pas

Démonstration pour $q > 1$:

Posons $q = 1 + a$ avec $a > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli :

$$q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$$

Comme $\lim(1 + na) = +\infty$, on a $\lim q^n = +\infty$

Démonstration détaillée pour $q > 1$:

Étape 1 : Posons $q = 1 + a$ avec $a > 0$ (car $q > 1$)

Étape 2 : D'après l'inégalité de Bernoulli :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Étape 3 : Comme $\lim(1 + na) = +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$

$$\text{Et que } q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$$

Étape 4 : Par comparaison, on conclut que $\lim q^n = +\infty$

Remarque :

Pour $-1 < q < 1$ et $q \neq 0$, on pose $Q = 1/|q| > 1$. On utilise alors le cas précédent et la règle du quotient.

Exemple :

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$

1) Montrer que (v_n) est géométrique :

$$\text{Posons } v_n = u_n + 5. \text{ Alors } v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = 2u_n + 10 = 2(u_n + 5) = 2v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 7$

2) Exprimer v_n puis u_n :

$$v_n = 7 \times 2^n, \text{ donc } u_n = v_n - 5 = 7 \times 2^n - 5$$

3) Limite de (u_n) :

Comme $2 > 1$, on a $\lim(2^n) = +\infty$, donc $\lim u_n = +\infty$

Exemple complet - Suite récurrente :

Définition : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$

Questions :

- 1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique
- 2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
- 3) En déduire la limite de (u_n)

Solution :

1) Suite auxiliaire : Posons $v_n = u_n + 5$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = (2u_n + 5) + 5 = 2u_n + 10 = 2(u_n + 5) = 2v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 2$ et $v_0 = 7$

2) Expression : $v_n = 7 \times 2^n$, donc $u_n = v_n - 5 = 7 \times 2^n - 5$

3) Limite : Comme $2 > 1$, $\lim(2^n) = +\infty$, donc $\lim u_n = +\infty$

6. Convergence d'une suite monotone

6.1 Suites majorées, minorées et bornées

Définition 4 :

Soit une suite (u_n) :

- (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée

Définition 4 - Suites bornées

Soit une suite (u_n) :

- **(u_n) est majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- **(u_n) est minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- **(u_n) est bornée** si elle est majorée et minorée

Remarque :

Le majorant ou le minorant n'est pas unique. Si 2 majore la suite (u_n) , alors tout réel supérieur à 2 majore aussi (u_n) .

Exemple :

Montrer que $u_n = 1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n)$ est bornée par $[1/2; 1]$

Majoration : $u_n \leq 1/n + 1/n + \dots + 1/n = n \times (1/n) = 1$

Minoration : $u_n \geq 1/(2n) + 1/(2n) + \dots + 1/(2n) = n \times (1/(2n)) = 1/2$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 1/2 \leq u_n \leq 1$

Exemple - Suite bornée :

Problème : Montrer que $u_n = 1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n)$ est bornée par $[1/2; 1]$

Preuve de la majoration :

$$u_n = 1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n) \text{ (n termes)}$$

$$\leq 1/n + 1/n + \dots + 1/n \text{ (n termes)}$$

$$= n \times (1/n) = 1$$

$$\text{Donc } u_n \leq 1$$

Preuve de la minoration :

$$u_n = 1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n) \text{ (n termes)}$$

$$\geq 1/(2n) + 1/(2n) + \dots + 1/(2n) \text{ (n termes)}$$

$$= n \times (1/(2n)) = 1/2$$

$$\text{Donc } u_n \geq 1/2$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 1/2 \leq u_n \leq 1$

6.2 Théorèmes de divergence et de convergence

Théorème 4 - Divergence :

Soit (u_n) une suite :

- Si (u_n) est croissante et non majorée alors (u_n) diverge vers $+\infty$
- Si (u_n) est décroissante et non minorée alors (u_n) diverge vers $-\infty$

Théorème 4 - Divergence des suites monotones

Soit (u_n) une suite :

- **Si (u_n) est croissante et non majorée** alors (u_n) diverge vers $+\infty$
- **Si (u_n) est décroissante et non minorée** alors (u_n) diverge vers $-\infty$

Démonstration :

Soit (u_n) croissante et non majorée. Pour tout intervalle $]A; +\infty[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]A; +\infty[$.

Comme (u_n) est croissante, $\forall n > N$, on a $u_n > u_N$, donc $u_n \in]A; +\infty[$.

Donc à partir d'un certain rang, tous les termes sont dans $]A; +\infty[$. La suite diverge vers $+\infty$.

Démonstration détaillée :

Hypothèse : (u_n) est croissante et non majorée

Étape 1 : (u_n) n'est pas majorée, donc pour tout intervalle $]A; +\infty[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in]A; +\infty[$

Étape 2 : Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n > N, u_n > u_N$

Étape 3 : Donc : $\forall n > N, u_n \in]A; +\infty[$

Étape 4 : Donc à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A; +\infty[$

Conclusion : La suite (u_n) diverge vers $+\infty$

Exemple :

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

Monotonie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$, donc (u_n) est croissante

Non majoration : Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n^2$

• **Initialisation :** $u_0 = 1 \geq 0^2 \checkmark$

• **Hérédité :** Si $u_n \geq n^2$, alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \geq n^2 + 2n + 3 \geq (n+1)^2 + 2 \geq (n+1)^2 \checkmark$

Donc (u_n) n'est pas majorée

Conclusion : (u_n) est croissante et non majorée, donc elle diverge vers $+\infty$

Exemple complet - Suite divergente :

Définition : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

1) Monotonie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$, donc (u_n) est croissante

2) Non majoration : Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n^2$

• **Initialisation :** $u_0 = 1 \geq 0^2 \checkmark$

• **Hérédité :** Si $u_n \geq n^2$, alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \geq n^2 + 2n + 3 \geq (n+1)^2 + 2 \geq (n+1)^2 \checkmark$

Donc (u_n) n'est pas majorée

3) Conclusion : (u_n) est croissante et non majorée, donc elle diverge vers $+\infty$

⚠ **Attention :**

La réciproque est fausse ! Si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante.

Exemples : $u_n = n + (-1)^n$ ou $u_n = n$ si n pair, $u_n = 2n$ si n impair

Théorème 5 - Convergence :

- Si une suite (u_n) est croissante et majorée alors elle converge
- Si une suite (u_n) est décroissante et minorée alors elle converge

Théorème 5 - Convergence des suites monotones

- **Si une suite (u_n) est croissante et majorée** alors elle converge
- **Si une suite (u_n) est décroissante et minorée** alors elle converge

Exemple :

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < u_{n+1} < 2$

Donc (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers l avec $0 < l \leq 2$

⚠ Attention :

Lorsqu'on passe à la limite, l'inégalité stricte $u_n < 2$ devient large $l \leq 2$.

Algorithme :

On admet que la suite u_n converge vers 2. Déterminer l'entier N à partir duquel $u_n > 1,999$.

Condition : $u_n > 1,999 \Leftrightarrow |u_n - 2| < 10^{-3}$

Résultat : $\lim(3) \rightarrow 6$, donc à partir de $n \geq 6$, $u_n > 1,999$

Algorithme de convergence :

Problème : On admet que la suite u_n converge vers 2. Déterminer l'entier N à partir duquel $u_n > 1,999$.

Condition : $u_n > 1,999 \Leftrightarrow |u_n - 2| < 10^{-3}$

Code Python :

```
from math import*
def lim(p):
    u=1
    n=0
    while abs(u-2)>=10**(-p):
        u=sqrt(u+2)
        n+=1
    return n
```

Résultat : $\lim(3) \rightarrow 6$, donc à partir de $n \geq 6$, $u_n > 1,999$

7. Utilisation de la limite d'une suite

Applications :

- **Modélisation** : Évolution de populations, croissance économique
- **Algorithmes** : Méthodes numériques, approximations
- **Analyse** : Continuité, dérivabilité, intégration
- **Géométrie** : Approximations de π , constructions géométriques

Résumé

Points essentiels à retenir :

- **Le raisonnement par récurrence** nécessite initialisation ET hérédité
- **Les limites de suites** peuvent être finies, infinies ou inexistantes
- **Les opérations sur les limites** suivent des règles précises (attention aux F.I.)
- **Les suites géométriques** ont des limites dépendant de leur raison
- **Les suites monotones bornées** convergent
- **Les suites monotones non bornées** divergent vers $\pm\infty$

- **Les théorèmes de comparaison** permettent de lever des indéterminations

Exercices d'application

Exercices pratiques :

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$
2. Calculer les limites des suites : $u_n = (2n+1)/(n-3)$, $v_n = n^2 - 3n + 1$
3. Étudier la convergence de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (u_n + 2)/3$
4. Démontrer que la suite $u_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ diverge vers $+\infty$
5. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$
6. Étudier la suite géométrique de premier terme 5 et de raison 0,8

Généré par Matheo - Assistant IA pour les mathématiques

Date de génération : 25/02/2026 à 04:06